Hydraulisk radius eller modstandsradius?

Vandføringsevnen er et centralt punkt i diskussion om nye regulativer for de danske vandløb. Vandføringsevnen beregnes normalt ved hjælp af Manningformlen, som er en empirisk formel for strømningsmodstanden, og i Manningformlen indgår *hydraulisk radius* som mål for størrelsen af gennemstrømningstværsnittet. Imidlertid benytter vi ofte i Danmark det som betegnes *modstandsradius* som alternativ til hydraulisk radius, hvilket har den konsekvens, at Manningtallet i Manningformlen må reduceres med 10 – 15 % hvis samme resultat skal opnås.

Torben Larsen &
Lasse Mondberg Schwenger

Baggrund

Allerede i 1775 da den franske vandløbsingeniør Antoine de Chézy fremlagde sin berømte formel for strømningsmodstanden i vandløb, indeholdt formlen hydraulisk radius, som den parameter der alene er i stand til at karakteriserede størrelsen af strømningstværsnittet. Ulempen ved Chézys formel var at formlens empiriske proportionalitetsfaktor (Chézy koefficienten) var afhængig af vandhastigheden. Efter utallige forsøg fra mange ingeniører og teknikere på at løse dette problem fremlagde Robert Manning i 1895 sin lige så berømte formel – den vi nu betegner Manningformlen, og som uændret opretholdt brugen af *hydraulisk radius*. Selvom der med tiden blev udviklet udmærkede og præcise hjælpeformler for løsning af problemet med Chézy-formlen, forsvandt den alligevel gradvist ud af den danske hydrauliske praksis.

Manningformlen

I dag er det Manningformlen som benyttes, når sammenhængen mellem vandføringen $Q = Q(h)$ og vandspejlsniveauet h skal bestemmes, og denne lyder:

$$Q = A\,M\,R^{2/3}\,S^{1/2} \quad (1)$$

hvor

M er Manningtallet som antages at være konstant uafhængigt af h

$A = A(h)$ er strømningstværsnittets areal

$R = R(h)$ er *hydraulisk radius* defineret som $R = A/P$, hvor perimeteren $P = P(h)$ er den "våde omkreds", dvs. længden af den del af tværsnittets omkreds der udgøres af vandløbets bund og sider

S er faldet på vandspejlet (hældningen i rent tal), hvilket normalt antages at være det samme som faldet på bunden

Modstandsradius

Med indtoget af PCen og de numeriske vandløbsmodeller (bl.a. VASP og MIKE Hydro m.fl.) i 1980erne opstod en ny praksis i Danmark, hvor hydraulisk radius R blev erstattet af den såkaldte modstandsradius R_*. Modstandsradius var blevet introduceret af F. A. Engelund (se Engelund og Pedersen, 1978) på et rent teoretisk grundlag med henblik på anvendelse ved meget brede vandløb med varierende vanddybde.

$$R_* = \left(\frac{1}{A}\int_0^B y^{3/2}\,dx\right)^2 \quad (2)$$

hvor B er vandløbets bredde og $y = y(x)$ er den lokale vanddybde som funktion af afstanden x vinkelret på strømretningen. Udledningen af formel (2) er forholdsvis kompliceret og bygger på Colebrook og White's formel. Tages i stedet udgangspunkt i Manningformlen bliver udledningen noget simplere (se Brorsen og Larsen, 2009) og modstandsradius bliver (formel (3)) :

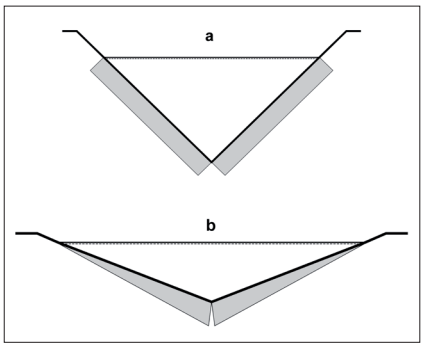
$$R_* = \left(\frac{1}{A}\int_0^B y^{5/3}\,dx\right)^{3/2} \quad (3)$$

I praksis giver de to formler stort set samme resultat i overensstemmelse med at brugen af henholdsvis Colebrook og White's formel og Manningformlen næsten ikke afviger fra hinanden når det gælder hydraulikken i vandløb.

Forskellen mellem hydraulisk radius og modstandsradius

Fysisk set dækker hydraulisk radius over, at det antages, at forskydningsspændingen mellem vand og vandløbsbund er konstant langs den våde omkreds, medens modstandsradius svarer til at for-skydningsspændingen lokalt er proportional med den lokale vandybde som varierer på tværs af vandløbet, se Figur 1 (Larsen, 2017).

Hydraulisk radius og modstandsradius repræsenterer to yderpunkter af hvorledes det antages, at de virkelige 3-dimensionale turbulente hydrodynamiske forhold i et vandløb kan reduceres ned til at lade sig beskrive 1-dimensionalt ved energiligningen og Manningformlen. For såkaldte "buttede" tværsnit, hvor bredde og dybde er af samme størrelsesorden giver hydraulisk radius det mest nøjagtige resultat. De fleste danske vandløb, ikke mindst de regulerede vandløb som er relativt smalle, dækkes bedst af hydraulik radius, fordi det netop var vandløb af denne type der blev benyttet til udvikling af Manningformlen.



Figur 1. Fordelingen af bundforskydnings-spænding ved henholdsvis a) hydraulisk radius og b) modstandsradius

For vandløbstværsnit, hvor tværsnittet er størrelsesordner bredere end det er dybt, vil modstandsradius være det bedste valg. Dette gælder især åer og floder, som strømmer over sine breder således at en betydelig del af vandføringen løber over terrænet uden for det egentlige flodleje. Her bør mod-standsradius benyttes, hvis de oversvømmede områder medregnes i tværsnittet. I sådanne situationer kompliceres sagen yderligere af, at det rette Manningtal er vanskeligt at fastlægge. Der foreligger ikke undersøgelser, der viser at brugen af modstandsradius giver mere præcise resultater end hydraulisk radius, når vandet holder sig i selve vandløbssengen. Alt i alt vurderes forskellen mellem de to angrebsvinkler i de fleste praktiske situationer at være uvæsentlige, hvis man blot undgår at blande dem sammen.

Modstandsradius benyttes ikke i udlandet og her medregnes effekten eventuelt ved en korrektion af Manningtallet. Den meget anvendte amerikanske vandløbsmodel HEC-RAS løser problemet med de brede vandløb ved at opdele tværnittet i hvad kunne kaldes "del-kanaler" som så tildeles hver sin hydrauliske radius og hvert sit Manningtal. (HEC-RAS, 2021).

Manningtallet ved hydraulisk og modstandsradius

Analyseres opmålinger af konkrete vandløbstværsnit ses, at hydraulisk radius altid er større end modstandsradius. Det drejer sig om en forskel mellem 5 og 30 % i praksis. Dette indebærer at man ikke umiddelbart kan benytte et Manningtal, der er bestemt ved brug af hydraulisk radius, til en efterfølgende beregning af vandspejlets beliggenhed hvor modstandsradius bruges i modelleringen. For at undgå fejl må Manningtallet derfor modificeres. Omregningen sker ved hjælp af Manning-formlen for samme vandløb med samme vandføring:

$$Q = A\,M\,R^{2/3}\,S^{1/2} = A\,M_*\,R_*^{2/3}\,S^{1/2}$$

hvoraf ses at

$$M_* = M\,\left(\frac{R}{R_*}\right)^{2/3}$$

hvor M og R svarer til brug af hydraulisk radius og M_* og R_* til modstandsradius.

For simple teoretiske tværsnitsformer kan hydraulisk radius og modstandsradius beregnes som ses i nedenstående tabel 1, som forudsætter at bredden er meget større end vandybden:

Hydraulisk radius og modstandsradius i virkelige vandløb

Der findes i Danmark et meget stort antal opmålinger af vandløbstværsnit og der er således et stort materiale der kunne analyseres nærmere, hvoraf en del ligger tilgængeligt på internettet. Her skal kun gives to eksempler:

1. SEGES refererer fra Geråa i Nordjylland (18 tværsnit over 2200 m, opmålt af LE34 og WSP) at gennemsnittet af forholdet mellem Manningtallene ved henholdsvis modstandsradius og hydraulisk radius var M_*/M = 0,90, dvs. en forskel på ca. 10 %. (SEGES 2021).
2. Fra et specialeprojekt ved Aalborg Universitet udført af Lasse Mondberg Schwenger, hvor 33 tværsnit i Kølle Å, Holbæk Kommune, (opmålt af Agrohydrologerne Aps.) blev analyseret, var gennemsnittet af R_*/R = 1,27 hvilket giver at M_*/M = 0,85 dvs. en forskel på ca. 15 % (Schwenger, 2021).

Diskussion

Resultaterne fra de virkelige vandløb forekommer at være i god overensstemmelse med det teoretiske billede fra Tabel 1. Står man i den situation, at man fra en ældre undersøgelse i vandløb ved opmåling har bestemt et Manningtal fx til 30, og nu ønsker en ny modellering af vandspejlets beliggenhed, hvor modelleringen benytter modstandsradius, så bør Manningtallet reduceres 10 – 15 % ned til ca. 26. Såfremt udgangspunktet var et Manningtal, der var bestemt under forudsætning af, at modstandsradius var gældende skal Manningtallet naturligvis ikke ændres.

Det kan være vanskeligt at fastlægge, hvad den nøjagtige omregningsfaktor bør være, selv for det enkelte vandløb. Betragtes et simpelt trapezformet tværsnit, vil forholdet mellem hydraulisk radius og modstandsradius variere med vanddybden. Ved små vanddybder er bredden meget større end dybden, geometrien er tilnærmelsesvis rektangulær og R_*/R = 1. Efterhånden som dybden stiger, vil forholdet R_*/R også stige. For et trapezformet tværsnit med bundbredde 7 meter og anlæg på 1, vil forholdet varierer fra 1 til 1.28 mellem 0 og 2 meters dybde. Dette svarer til en forskel i Manningtal fra 0 til 15%. Derfor afhænger omregningen af Manningtallet på den dybde, der tages udgangspunkt i.

Forskellen mellem de to Manningtal er ikke stor. Den er måske kun lidt større end den statistiske usikkerhed, men da der er tale om en systematisk afvigelse forekommer det principielt set ikke rimeligt, at se bort fra den.

Konklusion

Inden for den generelle usikkerhed, der er knyttet til hydrauliske beregninger med Manningformlen, vurderes der ikke at være forskel på om vurderinger af vandføringsevnen i vandløb sker ved brug af hydraulisk radius eller modstandsradius såfremt der tages hensyn til at Manningtallet, når der bruges modstandsradius, er 10 - 15 % mindre end når der bruges hydraulisk radius.

Tabel 1 Hydraulisk radius og modstandsradius samt Manningtal i meget brede tværsnit

Tværsnitsform (bemærk: bredden >> dybden d)	R	R_*	R_*/R	M_*/M
Rektangulær med konstant vanddybde d	d	d	1	1
Trekantformet med maksimal dybde d i midten	0,5 d	0,64 d	1,28	0,84
Parabelformet med maksimal dybde d i midten	0,67 d	0,77 d	1,16	0,91

Referencer

/1/ Brorsen M. og Larsen T. (2009). Læreborg i hydraulik. Aalborg Universitetsforlag

/2/ Engelund F. A. og Pedersen F. B (1974). Hydraulik. Den private Ingeniørfond.

/3/ HEC-RAS (2021). HEC-RAS Computer program. US Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Cen-tre. Set på https://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/

/4/ Larsen T. (2017). Manningtallet – en uendelig kilde til diskussion. Vand & Jord, 24. årgang nr. 2, maj 2017

/5/ Schwenger L. M. (2021). Indflydelsen af geometrisk opmålingstæthed på modelleret vandføringsevne. Specialeprojekt ved civilingeniøruddannelsen i Vand & Miljø ved Aalborg Universitet.

/6/ SEGES (2020). Rapport om ny opmålingsteknologis potentiale for at blive anvendt i kontrollen og dokumentationen af vandløbsregulativers overholdelse. Set på https://www.landbrugsinfo.dk/-/media/landbrugsinfo/public/b/3/8/rapport_opmalingsteknologi_til_vandlobsregulativers_overholdelse.pdf.

Torben Larsen, Institut for Byggeri, By og Miljø, Aalborg Universitet, tlar@build.aau.dk

Lasse Mondberg Schwenger, civilingeniør, SR Batymetri, lasse.m.schwenger@gmail.com